

QE スクエア



本欄は「会員の声」と同様、個人意見の主張の場であり、営利目的や誹謗^{ひぼう}等を除き、会員が自由に主張や意見を述べるためのスペースである。

●ベイズの定理の利得

コマツ 細井光夫

1. はじめに

QE スクエア「デジタルのSN比の美しさ¹⁾」に詰め込みすぎたので、改めて第3版実験計画法に書かれている「単純信頼度のSN比の計算²⁾」の誤りについて詳しく解説し、そのSN比を使った「ベイズの定理の利得」に関して補足したい。

2. 単純信頼度のSN比（再掲と補足）

正答なら1，誤答なら0とする変数 y_i を考えると n 回試行した標本での正答率 p ，全平方和 S_T ，平均の平方和 S_p ，誤差変動 S_e ，誤差分散 V_e は，

$$p = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

$$S_T = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = np$$

$$S_p = \frac{(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2}{n} = np^2$$

$$S_e = S_T - S_p = np - np^2 = np(1 - p)$$

$$V_e = \frac{S_e}{n - 1} = \frac{np(1 - p)}{n - 1}$$

上記の式をSN比 η の式に代入すると，

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\frac{1}{n}(S_p - V_e)}{V_e} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n - 1}{np(1 - p)} \times \left[np^2 - \frac{np(1 - p)}{n - 1} \right] \end{aligned}$$

文献2)の式(23.14)もここまでは同じである。
この先の正しい式の変形は，

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{p}{1 - p} \times \frac{n - 1}{n} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{p}{1 - p} \times \left[\frac{n - 1}{n} - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{p}{1 - p} \times \left(1 - \frac{1}{np} \right) \end{aligned}$$

ちなみに文献2)の間違えている式は，

$$\eta = \frac{p}{1 - p} \times \left(\frac{n - 1}{n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{p}{1 - p} \times \frac{n - 2}{n}$$

間違えている式と正しい式を見比べて()の有無という微妙な違いを確認してもらいたい。

いずれにせよ正答率 p の単純信頼度のSN比 η を

$$\eta \approx \frac{p}{1 - p} \quad \text{で計算することは変わらない。}$$

3. ベイズの定理の式

0と1の2値を取る変数が表1に示す頻度であるとき，事象Aを真値が1，事象Bを推定が1として，いろいろな割合（確率）を計算する。

全体の中の真値1の割合は，

$$P(A) = \frac{n_1}{n}$$

全体の中の推定1の割合は，

$$P(B) = \frac{r_1}{n}$$

真値1の中の推定1の割合は，

$$P(B|A) = \frac{n_{11}}{n_1}$$

推定1の中の真値1の割合は，

$$P(A|B) = \frac{n_{11}}{r_1}$$

以上をまとめると，

$$\frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)} = \frac{n_{11}}{n_1} \times \frac{n_1}{n} \times \frac{n}{r_1} = \frac{n_{11}}{r_1} = P(A|B)$$

これがベイズの定理の式である。

表1 真値と推定の対応表（頻度）

		推 定		合 計
		0	1	
真 値	0	n_{00}	n_{01}	n_0
	1	n_{10}	n_{11}	n_1
合 計		r_0	r_1	n